ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.I3 1982

А.В.Абрамов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ, НЕСУЩИХ ∇- СОПРЯЖЕННУЮ СЕТЬ.

В работе изучаются поверхности евклидова пространства,несущие ∇-сопряженную сеть,векторы вынужденных кривизн линий относительно друг друга которой равны нулю,кроме одного вектора.

I.На p-мерной поверхности V_p вещественного n-мерного евклидова пространства E_n рассмотрим сеть $\Sigma_p=(\sigma_1,\dots,\sigma_p)$,т.е. p семейств $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_p$ линий таких,что через каждую точку x некоторой области $\mathcal{G}\subset E_n$ проходит только по одной линии каждого семейства,причем векторы,касательные к линиям сети,образуют линейно независимую систему векторов.К поверхности V_p присоединяем подвижной полуортогональный репер $\{x,\vec{e}_i,\vec{e}_\alpha\}$,где $x\in\mathcal{G}$, $\vec{e}_i$ -единичные векторы,касательные к линиям сети, $\vec{e}_\alpha$ -единичные попарно ортогональные векторы нормали $N_{n-p}(x)$.Имеют место следующие деривационные формулы:

$$d\vec{x}=\omega^i\vec{e}_i\ ,\ d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha,\ d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta,$$

где $\vec{x}=\vec{x}(u^1,u^2,\dots,u^p)$-радиус-вектор точки $x\in\mathcal{G}$, ω^i- 1-формы от дифференциалов криволинейных координат u^i точки x ;

$$i,j,k,\dots=1,2,\dots,n\ ;\ \alpha,\beta,\gamma,\dots=p+1,\dots,n.$$

Продолжение системы дифференциальных уравнений $\omega^\alpha=0$ поверхности V_p приводит к равенствам:

$$\omega_i^\alpha=b_{ij}^\alpha\omega^j,\ \ b_{ij}^\alpha=b_{ji}^\alpha.$$

где b^{α}_{ij} -пучок вторых основных тензоров поверхности. I-формы $\omega^{\alpha}_{i}, \omega^{i}_{\alpha}, \omega^{i}_{j}, \omega^{\alpha}_{\beta}$ и метрический тензор $g_{ij}=\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ поверхности V_p связаны соотношениями:

$$dg_{ij}=g_{ik}\,\omega^{k}_{j}+g_{kj}\,\omega^{k}_{i},\quad \omega^{i}_{\alpha}+g^{ij}\,\omega^{\alpha}_{j}=0,\quad \omega^{\alpha}_{\beta}+\omega^{\beta}_{\alpha}=0$$

и удовлетворяют известным уравнениям структуры евклидова пространства. В нормальной плоскости $V_{n-p}(x)$ можно рассмотреть систему векторов $\vec{b}_{ij}=b^{\alpha}_{ij}\vec{e}_{\alpha}$. Метрический тензор g_{ij} индуцирует на поверхности V_p риманову связность ∇ без кручения. Тензор R^{i}_{jke} кривизны поверхности V_p (как риманова пространства) связан с векторами $\vec{b}_{ij}$ равенствами [2]:

$$R^{i}_{j\cdot ke}=g^{it}\,(\vec{b}_{jk}\,\vec{b}_{et}-\vec{b}_{je}\,\vec{b}_{kt}).$$

Сеть Σ_p называется ∇ -сопряженной [I], если для всех $i\neq j$ выполняется условие: $\nabla_i \vec{e}_j \in \Delta_2(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$, где $\nabla_i \vec{e}_j$ -ковариантная производная векторного поля $\vec{e}_j$ вдоль векторного поля $\vec{e}_i$, $\Delta_2(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$ -2-мерное распределение, натянутое на векторные поля $\vec{e}_i$ и $\vec{e}_j$. Как известно [1], уравнения ∇ -сопряженной сети в репере, построенном на касательных к линиям сети, имеют вид: $\omega^{i}_{j}=a^{i}_{ji}\,\omega^{i}+a^{i}_{jj}\,\omega^{j}\ (i\neq j)$. Дифференцирование последних уравнений приводит к системе конечных соотношений:

$$R^{i}_{jke}=g^{it}(\bar{b}_{jk}\,\bar{b}_{et}-\bar{b}_{je}\,\bar{b}_{kt})=0\quad (i,j,k,\ell\neq)\qquad (1)$$

2. Сеть Σ_p назовем почти сопряженной, если все ее направления сопряжены относительно конусов $b^{\alpha}_{ij}\,\omega^{i}\omega^{j}=0$, кроме, быть может, двух направлений. Пусть $\vec{e}_{i_0}$, $\vec{e}_{j_0}$ - пара, вообще говоря, не сопряженных направлений. Для почти сопряженной сети имеют место равенства: $\vec{b}_{\lambda i}=\vec{0},\ \vec{b}_{ij}=\vec{0}\ (i\neq j)$, где $i,j,k,\ldots \neq i_0, j_0$; $\lambda,\mu=i_0,j_0$.

Уравнения поверхности, несущей почти сопряженную сеть, имеют вид:

$$\omega^{\alpha}=0,\quad \omega^{a}_{\lambda}=b^{a}_{\lambda\mu}\,\omega^{\mu},\quad \omega^{\xi}_{i}=\omega^{\xi}_{\lambda}=0,\qquad (2)$$

где $a=p+1,\ldots,p+q$; $\xi=p+q+1,\ldots,n$; q-ранг системы векторов

$\vec{b}_{ii}, \vec{b}_{\lambda\mu}$. Дифференцирование системы уравнений (2) приводит к системе конечных соотношений:

$$\bar{b}_{jj}\,a^{j}_{i\mu}+\vec{b}_{ii}\,(a^{i}_{j\mu}-a^{i}_{\mu j})-\bar{b}_{\lambda\mu}\,a^{\lambda}_{ij}=\vec{0}\quad (i\neq j),$$

$$\bar{b}_{jj}\,a^{j}_{ik}+\bar{b}_{ii}\,(a^{i}_{jk}-a^{i}_{kj})-\bar{b}_{kk}\,a^{k}_{ij}=\vec{0}\quad (i,j,k\neq),\ (3)$$

$$\bar{b}_{i_0j_0}\,a^{i_0}_{ij_0}-\bar{b}_{j_0j_0}\,a^{j_0}_{ii_0}+\bar{b}_{i_0j_0}(a^{j_0}_{ij_0}-a^{i_0}_{ij_0})+\bar{b}_{ii}(a^{i}_{i_0j_0}-a^{i}_{j_0i_0})=\vec{0}.$$

Из последних равенств следует утверждение: почти сопряженная сеть является ∇-сопряженной, если каждая система векторов $(\bar{b}_{i_0i_0},\bar{b}_{j_0j_0},\bar{b}_{i_0j_0},\bar{b}_{ii}),(\bar{b}_{ii},\bar{b}_{jj},\bar{b}_{kk}),(\bar{b}_{jj},\bar{b}_{ii},\bar{b}_{\lambda\lambda},\bar{b}_{i_0j_0})$ является линейно независимой и направления $\vec{e}_{i_0}$ и $\vec{e}_{j_0}$ - ∇-сопряжены. При этом псевдофокусы [3] $F^{i_0}_{i}$ и $F^{j_0}_{i}$ на прямых $[x,\vec{e}_i]$ совпадают.

3. Пусть сеть Σ_p является почти сопряженной ∇-сопряженной. Равенства (3) принимают вид: $b_{i_0j_0}(a^{j_0}_{ij_0}-a^{i_0}_{ii_0})=\vec{0}$. Отсюда следует предложение: почти сопряженная ∇-сопряженная сеть является сопряженной сетью, если псевдофокусы $F^{i_0}_{i}$ и $F^{j_0}_{i}$ не совпадают хотя бы на одной прямой $[x,e_i]$. Если направления $\bar{e}_{i_0},e_{j_0}$ не сопряжены $(\vec{b}_{i_0j_0}\neq\vec{0})$, то псевдофокусы совпадают на всех прямых $[x,\vec{e}_i]$.

Равенства (I) принимают вид: $g^{ij}\bar{b}_{i_0j_0}\cdot\bar{b}_{ii}=0$ (не суммировать). Следовательно, если поверхность несет почти сопряженную ∇-сопряженную сеть, то для пары различных индексов i и j выполняется по крайней мере одно из следующих условий: а/ векторы $\vec{E}_i=g^{iu}\vec{e}_u$ и $\vec{E}_j=g^{ju}\vec{e}_u$ ($u=1,2,\ldots,p$) -ортогональны; б/ векторы $\vec{b}_{ii}$ и $\vec{b}_{jj}$ ортогональны вектору $\vec{b}_{i_0j_0}$.

Поверхность $V_p\subset E_n$, несущая почти сопряженную ∇-сопряженную ортогональную сеть, лежащая в своей соприкасающейся плоскости, существует и определяется с произволом $q+\frac{p^2-3p+4}{2}$ функций двух аргументов.

4. ∇-сетью Фосса называется ∇-сопряженная геодезическая сеть [1]. Дифференциальные уравнения такой сети имеют вид: $\omega^{i}_{j}=a^{i}_{ji}\,\omega^{i}\ (i\neq j)$. Дифференцирование последних уравнений в случае почти сопряженной сети при-

водит к равенствам: $R^i_{\lambda\lambda\mu} = 0 \; (\mu \neq \lambda)$.

Можно доказать утверждение: поверхность $V_p \subset E_n$, несущая почти сопряженную ∇-сеть Фосса, или является ортогональным произведением [4] 2-мерной поверхности V_2 на сопряженную систему V_{p-2}, или расслаивается на 2-мерные поверхности нулевой скалярной кривизны и $(p-2)$-мерные сопряженные системы.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях.-Тр. геометрич.семинара, т.6, ВИНИТИ АН СССР, 1974, с.189-205.

2. Э й з е н х а р т Л.П. Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.

3. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сб., 1966, №4, с.475-492.

4. Ф а в а р Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии, ИЛ, М., 1960.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.13 1982

Н.В.А м и ш е в а

ДВА КЛАССА КОМПЛЕКСА КОНИК В АФФИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Рассматривается в трехмерном аффинном пространстве комплекс невырожденных коник. Деривационные формулы репера $\{A, e_{\hat\alpha}\}$ в аффинном пространстве имеют вид:

$$dA = \omega^{\hat\alpha} e_{\hat\alpha}, \quad de_{\hat\alpha} = \omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha} e_{\hat\beta} \qquad (\hat\alpha, \hat\beta = 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа $\omega^{\hat\alpha}$, $\omega^{\hat\beta}_{\hat\alpha}$ удовлетворяют уравнениям структуры аффинного пространства. Помещая начало репера $\{A, e_{\hat\alpha}\}$ в центр коники Q_2 и направляя векторы так, что e_α компланарны плоскости L_2 коники, а e_3-произвольный вектор пространства, не компланарный с $\{e_\alpha\}$, запишем уравнения коники в виде:

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = 1, \quad x^3 = 0, \quad \det \| a_{\alpha\beta} \| \neq 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2). \tag{1.2}$$

Исключая из рассмотрения комплексы коник, у которых многообразие центров вырождается, примем $\omega^{\hat\alpha}$ ($\hat\alpha = 1, 2, 3$) за независимые формы семейства коник. Тогда система уравнений Пфаффа указанного семейства принимает вид:

$$\Theta_{\alpha\beta} = da_{\alpha\beta} - a_{\gamma\beta}\, \omega^\gamma_\alpha - a_{\alpha\gamma}\, \omega^\gamma_\beta = b_{\alpha\beta\hat\alpha}\, \omega^{\hat\alpha}, \tag{1.3}$$
$$\omega^3_\alpha = \Lambda^3_{\alpha\hat\alpha}\, \omega^{\hat\alpha}.$$

Основные прямые [5] комплекса коник в построенном репере определяются системой уравнений:

$$(\Lambda^3_{\alpha 1}\, a_{\beta 2} - \Lambda^3_{\alpha 2}\, a_{\beta 1})\, x^\alpha x^\beta = 0, \quad x^3 = 0. \tag{1.4}$$

В общем случае в плоскости коники имеется две различные основные прямые. Однако, могут иметь место вырож-